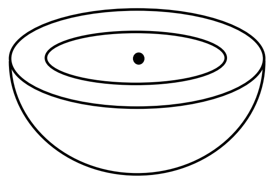
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 4

Problema 1. Considere una configuración de cargas compuesta por una carga puntual $(q_0 > 0)$ ubicada en el centro de una esfera maciza conductora ahuecada interiormente. El radio interior de la esfera es a y el radio exterior es b.



Esta imagen es solo ilustrativa, ya que la esfera es cerrada

(a) Calcule el campo el eléctrico en todo el espacio.
(b) Calcule el potencial eléctrico en todo el espacio.
(c) La diferencia de potencial entre los puntos a y b dentro del cascaron.

(a) Usando la ley de Gauss, calculamos el campo eléctrico en cada región, considerando regiones de integración como esferas con centro en la carga puntual.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Por la simetría del problema, el campo eléctrico es constante esa área de integración, por lo que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA = 4\pi E r^2$$

Para la región dentro del radio a:

$$4\pi E r^2 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Para la región entre radio a y b:

$$\vec{E} = \vec{0}$$

Para la región fuera del radio b:

$$4\pi E r^2 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_0}{\varepsilon_0} + \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(q_0 + Q)\hat{r}$$

(b) Por definición de potencial tenemos:

$$V = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Para la región fuera del radio b tenemos:

$$V = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{r'^2} dr' = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_r^\infty = \frac{q_0 + Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Para la región dentro de b y fuera del radio a:

$$V = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_b^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty 0\, dr' = \frac{q_0 + Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

La región dentro de a:

$$V = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_b^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_r^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q_0 + Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^a \frac{1}{r'^2} dr' = \frac{q_0 + Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

(c) La diferencia de potencial es:

$$V_{(b)} - V_{(a)} = \frac{q_0 + Q}{4\pi\varepsilon_0 b} - \frac{q_0 + Q}{4\pi\varepsilon_0 b} = 0$$

Problema 2. Considere un potencial en dos dimensiones dado por la función:

$$V_{(x,y)} = e^x \sin(xy)$$

Calcule la fuerza que se ejercería sobre una partícula de carga $2q$ en el punto $\left(\pi, \frac{1}{4}\right)$

La fuerza eléctrica se determina como:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Mientras que el campo eléctrico:

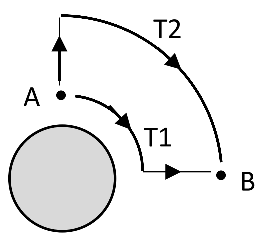
$$\vec{E} = -\nabla V$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera tenemos

$$\vec{F} = -q\nabla V = -2q\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath}\right) = -2q(e^x(\sin(xy) + y\cos(xy))\hat{\imath} + xe^x\cos(xy)\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{F}_{\left(\pi,\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^{\pi}\sqrt{2}}{2}\left(\frac{5}{4}\hat{\imath} + \pi\hat{\jmath}\right)$$

Problema 3. Considere una esfera con carga Q uniformemente distribuida. Demuestre que la integral de camino del campo eléctrico entre los puntos A (distancia a del centro de la esfera) y B (distancia b del centro de la esfera) es igual para la trayectoria 1 y 2 ¿Cuánto vale la integral de línea cerrada?



Primero vemos que el campo eléctrico producido por la esfera fuera de esta es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

La trayectoria 1, está compuesta por dos curvas, por lo que:

$$\Delta V_{T1} = \int_{T1}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_1}\vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_1}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_1}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{\theta}\,d\theta + \int_a^b\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Notar que la integral sobre la primera curva de la trayectoria 1 es cero, ya que el campo eléctrico es perpendicular a la trayectoria de la curva.

La trayectoria 2, está compuesta también por dos curvas, por lo que:

$$\Delta V_{T2} = \int_{T2}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_3}\vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_4}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr + \int_{\gamma_4}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{\theta}\,d\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\Delta V_{T1} = \Delta V_{T2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Para la integral sobre una curva cerrada:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{T1}\vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{T2}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0$$